Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques
Vol. 32, núm. 2, 2017. Pàg. 101–131. DOI: 10.2436/20.2002.01.75

Un apunt de matemàtica financera

Joaquim Bruna i Joan del Castillo

Resum: Cap als anys setanta del segle passat, el món de les finances experimentà una revolució amb la generalització i amb la comercialització dels productes financers derivats i, sobretot, amb la introducció del model de Black-Scholes per a fer-ne la valoració. L'objectiu d'aquest article és descriure aquest model d'una manera autocontinguda i tan elemental com sigui possible, seguint bàsicament Cox, Ross i Rubinstein [6]. Això requereix parlar prèviament del model de Samuelson per als actius subjacents, que utilitza el moviment brownià geomètric. Al final fem unes consideracions sobre la validesa d'aquests models i com s'utilitza avui en dia la fórmula de Black-Scholes a la pràctica diària.

Paraules clau: llei normal, moviment brownià, processos estocàstics, actius financers, valoració d'opcions, arbitratge, model de Black-Scholes, cobertura de risc.

Classificació MSC2010: 91G20, 91G60, 91G70.

1 Observant els mercats financers

L'economia real tracta de la producció, la distribució i els intercanvis de béns i serveis. Aquests intercanvis varen fer néixer el diner, justament per a facilitar-los. Amb el diner neixen els instruments financers (diferents formes de diner), els quals originen les institucions financeres, que tracten de protegir-lo i assegurar-lo. Es pot dir que les finances no són més que l'estudi de l'evolució temporal de les diferents formes de diner.

Una descripció dels mercats financers per a matemàtics ha de començar amb la fórmula de l'interès compost continu, és a dir, la fórmula del creixement del diner sense risc. Thomas Edison (inventor i, sobretot, home de negocis) considerava que aquesta era la fórmula més important de les matemàtiques.

Anomenem r_a el tipus d'interès compost anual, que en àmbits financers es coneix com a *interès TAE*. Si avui tenim uns estalvis en un dipòsit bancari D_0 en anys successius tindran un valor

$$D_n = D_0(1 + r_a)^n.$$

Evidentment, aquesta expressió també té sentit per a períodes de temps t que no siguin múltiples enters de l'any. Matemàticament és més entenedor posar $1 + r_a = e^r$, és a dir, $r = \ln(1 + r_a)$, de forma que

$$D_t = D_0 e^{rt}, \tag{1}$$

aleshores podem escriure

$$\frac{dD_t}{dt} = rD_t \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dD_t}{D_t} = r\,dt,$$

que diu que el diner (sense risc) rendeix en cada instant amb taxa r i per això r s'anomena l'*interès continu*. Estrictament, com que $e^r \geq 1 + r$, tenim que $r_a > r$. De fet, atès que

$$e^r = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n,$$

r pot ser interpretat també com un tipus d'interès anual simple, inicial, que fet compost, pagat de forma contínua, dona lloc a $r_a > r$. A vegades sentim parlar del tipus d'interès compost mensual r_m, que evidentment no és $\frac{r_a}{12}$ sinó definit per la igualtat

$$1 + r_a = (1 + r_m)^{12}.$$

Després de l'interès compost hem de parlar d'accions i de la borsa. Quan una empresa necessita finançament per a realitzar una inversió pot acudir al mercat primari de capitals per emetre títols de propietat o vendre accions. Aquest procediment permet obtenir recursos estables i la retribució als inversors està en funció del benefici que produirà la inversió (repartiment de dividends). Per tal que una empresa sigui autoritzada a vendre accions i esdevenir una societat per accions (o societat anònima) cal que estigui sotmesa a controls i presentar de forma regular informació suficient perquè els possibles contractants puguin saber què els ofereixen. Normalment només les grans empreses s'acullen a aquestes exigències. Un cop emeses les accions, aquestes s'intercanvien en la borsa i el seu preu s'ajusta a l'oferta i la demanda. D'aquesta manera es produeixen oscil·lacions que recullen diàriament els mitjans de comunicació. Els índexs borsaris que sovint sentim anomenar en els mitjans de comunicació, com ara l'Ibex 35, el Dow Jones, etc., són mitjanes, en general ponderades segons el seu nivell d'importància, dels valors de les accions de les empreses que hi entren.

Tot i que la unitat de temps en finances és l'any, la informació és seguida a temps continu, i es diu que una notícia deixa de tenir valor econòmic al cap d'un quart d'hora. Així, anomenarem $S(t)$ (o bé S_t, de l'anglès *stock*) el preu d'un determinat actiu financer en l'instant de temps t. Es parla de *dades d'alta freqüència* quan les observacions són fetes a intervals inferiors al dia. El més habitual, però, és treballar amb els preus dels actius al final del dia, anomenats *preus de tancament*.

Suposarem de moment que hem observat una sèrie temporal diària de dades de tancament S_t, on t pren valors enters de 0 a n. La *rendibilitat neta* de l'actiu en un determinat dia t és

$$R_t = (S_t - S_{t-1})/S_{t-1},$$

és a dir, $S_t = (1 + R_t)S_{t-1}$. Aquesta és la rendibilitat a la qual es refereixen diàriament els mitjans de comunicació en relació amb les empreses o els índexs borsaris. Definirem la rendibilitat contínua, o simplement *rendibilitat*, com

$$r_t = \ln(1 + R_t) = \ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = s_t - s_{t-1}, \tag{2}$$

on $s_t = \ln S_t$ s'anomenen els *log-preus*. Per la fórmula de Taylor, $r_t = \ln(1 + R_t) \approx R_t$, per tant, aquestes quantitats no es diferencien gaire des del punt de vista pràctic.

La figura 1 mostra l'evolució diària dels preus de l'Ibex des dels seus orígens fins al 30 de juny del 2016. Aquest és un exemple de l'evolució del diner amb risc. Pot observar-se que en aquesta sèrie queden reflectits els impactes sobre els preus de les empreses dels fets econòmics i polítics més rellevants, que omplen les planes dels mitjans de comunicació. Per exemple, el 10 de setembre del 1998 es produeix la suspensió de pagaments del deute de Rússia; això provoca una caiguda de la borsa espanyola d'11000 a 7000 punts i els inversors perden en uns dies un 36% dels seus estalvis. Aquest esdeveniment va produir la caiguda de Long Term Capital Management, empresa model en aquells anys assessorada per Myron Scholes i Robert Merton, que havien estat guardonats el 1997 amb el Premi Nobel per la seva contribució a la valoració de derivats.

Fins a mitjans del segle passat, el comportament de la borsa, la *tendència* que segueix un determinat actiu, es va intentar predir a partir de l'estudi de les gràfiques de les cotitzacions de les empreses o dels índexs tal com el de la figura 1, i extrapolant d'alguna forma. Però, és clar, aquestes gràfiques descriuen la història passada i el passat no determina el futur. Per això les previsions fetes a partir de gràfiques (quelcom que s'anomena l'*anàlisi tècnica*) no són gaire de fiar. Tampoc no és determinant en el comportament del preu de les accions el coneixement dels balanços, comptes de resultats i informació exhaustiva de les empreses (el que s'anomena l'*anàlisi fonamental*, vegeu [11]). Passa una mica com en el futbol, on conèixer tota la informació relativa als jugadors, entrenadors, directius i massa social dels clubs no fa pas guanyar diners a les travesses.

Als anys cinquanta, Markowitz (premi Nobel el 1990, juntament amb Sharpe i Miller) introdueix una idea nova per a l'estudi de l'evolució de les cotitzacions borsàries. Aquesta és la idea de *risc*, idea que en estadística coneixem com a *variabilitat*. A partir d'aquest moment la tendència deixa de ser l'únic objectiu de l'atenció dels inversors, per a centrar-se en el binomi tendència i risc. L'estudi de la tendència continua fent-se sota els noms d'*anàlisi tècnica* i d'*anàlisi fonamental*, però la idea de mesurar el risc associat a uns possibles guanys cada cop és més acceptada.

Els treballs de Markowitz, Sharpe i Lintner són la base del que s'anomena avui la *teoria moderna de carteres* (*portfolios*), que tracta d'optimitzar el rendiment d'una cartera d'accions un cop fixat un cert nivell de risc. La teoria mostra clarament els avantatges de diversificar les inversions, tal com recull la dita «Cal no posar tots els ous al mateix cistell». De fet, hom pot fer veure que la millor inversió en renda variable de baix risc és seguir l'índex del mercat dins de la pròpia divisa. És a dir, dins de la zona euro, comprar una cistella d'accions que repliqui l'índex Euro Stoxx 50, de les 50 empreses europees més importants.

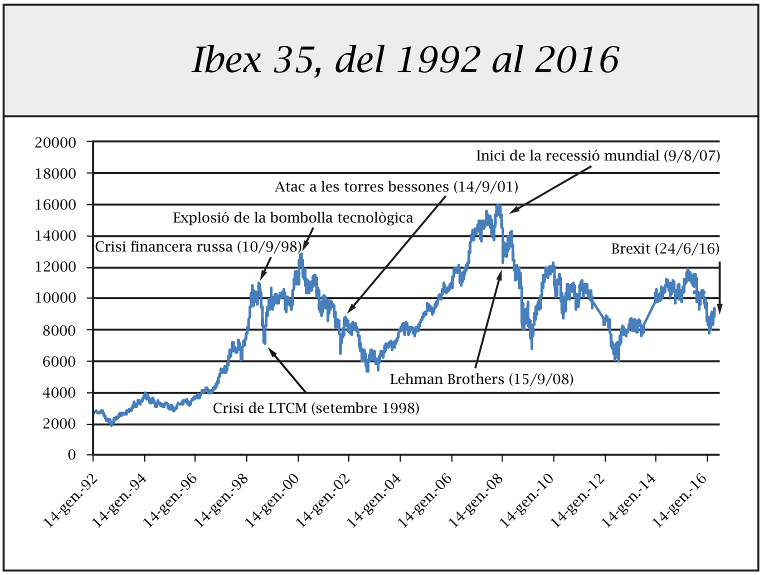

FIGURA 1: Ibex 35, des del començament de l'índex fins a mitjans del 2016.

2 Modelització dels actius de renda variable

Donar un model útil dels mercats financers no és una tasca fàcil. A diferència dels models per a l'economia, els mercats financers són essencialment impredictibles; d'això en parlarem a la secció 9 (el nostre company C. Simó acostuma a dir que la raó és que la mala fe de les persones és difícilment modelitzable matemàticament). El model bàsic que s'ha acabat imposant, després del treball de Black i Scholes el 1973 [4], que descriurem més endavant, és el *passeig aleatori*. És significatiu constatar que hem arribat a aquest model tres quarts de segle després que Louis Bachelier essencialment el formulés en la seva tesi [2].

Efectivament, Paul Samuelson treballava al MIT als anys cinquanta quan va tenir notícia de la tesi de Louis Bachelier, «Théorie de la spéculation», defensada el 29 de març del 1900 a la Universitat de París. Aquesta tesi, que havia quedat oblidada, va tenir una profunda influència en el treball que Samuelson estava realitzant i a través d'ell també va arribar als economistes i en particular als seus alumnes, entre els quals destaquen Robert Merton i Myron Scholes, mencionats anteriorment, el primer dels quals va fer la contribució fonamental [12]. El que havia fet Bachelier, més de cinquanta anys enrere, era donar un model per a l'evolució dels actius financers basat en el que avui en diem un *passeig aleatori*. Des de Samuelson (premi Nobel d'economia el 1970, el primer americà en aconseguir-lo) el model fonamental per als actius financers postula que les rendibilitats es distribueixen com a variables aleatòries gaussianes independents.

2.1 El model discret

De moment ens centrarem en un model discret en el qual hem fixat la unitat temporal d'un dia, i utilitzem la notació S_t. Més endavant passarem a la unitat temporal d'un any, amb la notació $S(t)$, suposant, com és habitual, que el nombre de dies de negoci de l'any són 250. Així $S_t = S(t/250)$ per al preu del dia t, $t = 0, 1, 2, \dots, n$.

El postulat introduït per Samuelson és que les variables r_t tenen una llei normal i són independents:

$$r_t \sim N(\mu_d, \sigma_d^2), \text{ independents.} \tag{3}$$

Els paràmetres μ_d i σ_d són el valor mitjà i la desviació típica diaris. Donat que μ_d i σ_d no depenen del temps t, direm que la successió $\{r_t\}$ és *estacionària*.

Aleshores, iterant a partir de (2),

$$s_t = s_{t-1} + r_t \quad \Longrightarrow \quad s_t = s_0 + \sum_{i=1}^{t} r_i \tag{4}$$

és una suma de variables aleatòries independents, amb la mateixa llei normal. Direm doncs que la successió $\{s_t\}$ és un procés amb increments independents, estacionaris i gaussians, o també que és un *passeig aleatori (gaussià)* amb esperança μ_d i desviació típica σ_d. Suposant que $t = 0$ correspon al dia inicial i que $s_0 = \ln S_0$ és conegut, i tenint en compte que la suma de variables aleatòries independents normals és també normal, resulta que s_t té distribució gaussiana, amb esperança, variància i desviació estàndard donades per

$$E(s_t) = s_0 + t\mu_d, \quad V(s_t) = t\sigma_d^2, \quad \mathrm{sd}(s_t) = \sqrt{t}\sigma_d.$$

Veiem, per tant, que μ_d és el pendent de $E(s_t)$, i per això s'anomena també la *tendència*. Aquest és un dels resultats fonamentals ja trobat per Bachelier: els guanys (o millor dit l'esperança de guany), representats per $t\mu_d$, creixen com t, i els riscos, representats per $\sqrt{t}\sigma_d$, creixen com $\sqrt{t}$; vegeu la figura 2. És a dir, a llarg termini (t gran) la tendència dominarà sobre el risc, per això es diu que la borsa és una inversió que cal fer a llarg termini.

Donat que la unitat de temps en finances és l'any, anualitzarem els paràmetres a partir de

$$\mu_a = 250\mu_d, \quad \sigma_a^2 = 250\sigma_d^2, \tag{5}$$

on μ_a representa ara la *tendència* anual del procés de log-preus i σ_a^2 la seva variància anual, anomenada en aquest context *volatilitat*. D'aquesta forma, si el temps el mesurem en anys, tindrem que a escala logarítmica $s(t)$ té distribució normal amb paràmetres $s(0) + t\mu_a$ i $\sqrt{t}\sigma_a$. Una variable aleatòria Y que és de la forma $Y = e^X$, amb X una variable normal, s'anomena *variable de tipus log-normal*. Així, a escala natural $S(t) = e^{s(t)}$ té una distribució log-normal. S'ha de parar compte que els paràmetres de la llei de $s(t)$ ja no representen l'esperança i variància de $S(t)$. Podem calcular l'esperança de $S(t)$ utilitzant que l'esperança d'una variable aleatòria $g(X)$, funció d'una altra variable aleatòria X amb funció de densitat f_X, és

$$E(g(X)) = \int g(x) f_X(x)\, dx. \tag{6}$$

En el nostre cas podem escriure $S(t) = e^{s(t)} = e^{s(0)+t\mu_a+\sqrt{t}\sigma_a Z} = S(0)e^{t\mu_a}e^{\sqrt{t}\sigma_a Z}$, amb Z normal estàndard $N(0,1)$. Per tant,

$$E(S(t)) = S(0)e^{t\mu_a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{\sqrt{t}\sigma_a x}e^{-\frac{1}{2}x^2}\, dx,$$

i completant quadrats trobem

$$E(S(t)) = S(0)e^{t(\mu_a+\frac{1}{2}\sigma_a^2)} = S_0 e^{\mu t}, \tag{7}$$

on $\mu = \mu_a + \frac{1}{2}\sigma_a^2$ és el valor esperat de la taxa de creixement (o decreixement) de la inversió mantinguda durant un any (compareu la fórmula amb (1)).

Tot seguit veurem què ens diu aquest model sobre les dades de la figura 1. La sèrie històrica de «preus» diaris S_t de l'Ibex 35 va del 14 de gener del 1992 fins al 30 de juny del 2016, i en aquest temps l'índex evoluciona de $S_0 = 2693$ fins a $S_n = 8163$ punts. El màxim de la sèrie és 15895 i es produeix el 6 de novembre del 2007. Són més de 24 anys, aproximadament 6000 observacions ($n = 5942$). A partir d'aquesta sèrie dels S_t calculem les rendibilitats $r_t = \ln \frac{S_t}{S_{t-1}}$, que són mostres de variables normals $N(\mu_d, \sigma_d^2)$ independents, segons el model (3). A continuació fem una estimació de μ_d, σ_d utilitzant els estimadors habituals de la mitjana i la variància (vegeu [13]):

$$\hat{\mu}_d = \overline{r} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} r_t, \quad \hat{\sigma}_d^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}(r_t - \overline{r})^2,$$

i obtenim una mitjana de $\hat{\mu}_d = 1.87 \times 10^{-4}$ i una desviació estàndard de $\hat{\sigma}_d = 1.46 \times 10^{-2}$; aquests valors són, per tant, una estimació de la rendibilitat mitjana diària de l'Ibex μ_d i de la desviació estàndard diària σ_d. Així, a partir de (5), obtenim les estimacions de la rendibilitat mitjana anual i de la volatilitat

$$\hat{\mu}_a = 4.67 \times 10^{-2}, \quad \hat{\sigma}_a = 23.02 \times 10^{-2}.$$

Això ens diu d'una banda que l'Ibex durant aquests 24 anys ha estat pujant, a escala logarítmica, una mitjana de 4.67 % per any i que el veritable creixement anual de l'Ibex, μ_a, a escala logarítmica, es troba amb un 95 % de confiança entre

$$\hat{\mu}_a \pm 1.96 \frac{\hat{\sigma_a}}{\sqrt{24}} = (-4.55\,\%, 13.88\,\%).$$

Realment, per a fer previsions de futur ens interessaria conèixer μ_a, però amb el coneixement de tota la història de l'índex no estem segurs ni que aquest valor sigui positiu!; l'estimem en el 4.67 %, però en aquesta estimació hi ha un soroll del 23.02 %. Tot i això, per a fer previsions no tenim altre camí que fer servir les estimacions com si fossin els valors reals, sense oblidar les incerteses que les acompanyen.

El pas següent és avaluar quin és el valor esperat d'una inversió de $S(0) = S_0 = 100$ en Ibex d'ací a un any, utilitzant (7), amb $\hat{\mu} = \hat{\mu}_a + \frac{1}{2}\hat{\sigma_a}^2 = 0.73 \times 10^{-2}$. Deduïm que $E(S(1)) = 100e^{0.0732} = 107.6$, és a dir, avui en dia cal esperar que en un any 100 euros en Ibex es transformin en 107.6 euros.

Per complementar el possible optimisme que el càlcul anterior ha donat dels valors esperats, tot seguit calcularem la probabilitat de perdre diners invertint en Ibex a un any vista, $\Pr(S(1) < S(0))$, utilitzant els mateixos valors estimats dels paràmetres; si Z designa la llei normal estàndard $N(0,1)$ obtenim

$$\Pr(S(1)/S(0) < 1) = \Pr(Z < -\mu_a/\sigma_a) \approx 42\,\%,$$

resultat que segurament ens refreda l'optimisme.

2.2 El model continu

Fins ara hem estat considerant períodes de temps que són múltiples enters de la unitat temporal. El model donat per (3) i (4) és equivalent a dir que els log-preus $s(t)$ són variables normals que compleixen

$$E[s(t)] = s_0 + t\mu_a, \quad V[s(t)] = t\sigma_a^2, \quad \mathrm{cov}[s(t_1), s(t_2)] = \min\{t_1, t_2\}\sigma_a^2, \tag{8}$$

que en aquest context discret s'anomena *passeig aleatori discret i gaussià*. Aquí, $\mathrm{cov}(X;Y)$ designa la covariància de les dues variables X, Y, que es defineix per $E(XY) - E(X)E(Y)$. Donada la continuïtat de les transaccions en un àmbit mundial, és lògic plantejar-se sèries temporals amb increments de temps cada cop més petits. Podem subdividir els intervals diaris passant a intervals d'una hora, un minut, un segon, etc. Així, el model a temps continu és el mateix, (8), considerant que la variable t varia contínuament a $[0, +\infty)$. En aquest punt recordem algunes nocions generals rellevants (vegeu també [10] i [14]).

En general, una família de variables aleatòries $X(t)$ dependent d'un paràmetre $t \in [0, +\infty)$ s'anomena *procés estocàstic*. Segurament el més important és l'anomenat *procés de Wiener* (*o brownià estàndard*), $W(t)$, caracteritzat per les propietats següents:

- $W(0) = 0$.
- $W(v) - W(u)$ és independent de $W(t) - W(s)$ sempre que $v > u \geq t > s$ (increments independents).
- $W(t) - W(s)$ té distribució $N(0, t - s)$, per a tot $t > s$ (increments estacionaris i gaussians).

La demostració rigorosa de l'existència d'aquest procés fou feta per Wiener. També està caracteritzat dient que és un procés gaussià que compleix (8) amb $\mu = 0$ i $\sigma^2 = 1$,

$$E[W(t)] = 0, \quad V[W(t)] = t, \quad \mathrm{cov}[W(t_1), W(t_2)] = \min\{t_1, t_2\}.$$

Així com d'una variable aleatòria n'observem valors, que són números, cada realització (o trajectòria) ω d'un procés estocàstic $X(t)$ és una funció $t \to X_\omega(t)$, on $X_\omega(t)$ és un valor observat de $X(t)$. El procés de Wiener té quasi per a tot trajectòries contínues no derivables (aquí no entrem en el tema delicat de precisar en quin espai de probabilitat estan definides les variables $W(t)$).

El *moviment brownià* (aritmètic) $B(t)$ no és més que el procés de Wiener amb tendència μ i variància σ^2, $B(t) = \mu t + \sigma W(t)$. El nom prové del botànic anglès Robert Brown, que va descriure el moviment d'una petita partícula (per exemple, el pol·len) totalment immersa en un líquid o gas. Albert Einstein va explicar sobre bases científiques aquest moviment i posteriorment Norbert Wiener va fer-ne el tractament matemàtic. D'una manera simplificada, un moviment brownià és un procés $B(t)$ amb $B(0) = 0$ tal que $B(t + s) - B(s)$ té llei normal $N(t\mu, t\sigma^2)$ i és independent de $B(x)$, per a $x \leq s$.

Actualment, després de Samuelson, es postula que els log-preus d'un actiu a l'instant t, $s(t)$, segueixen, tal com diu (8), un moviment brownià amb tendència μ_a i volatilitat σ_a^2, paràmetres que s'estimen com hem vist anteriorment. Alternativament, hom diu que $S(t) = e^{s(t)}$ segueix un *brownià geomètric* de tendència $\mu = \mu_a + \frac{1}{2}\sigma_a^2$ i volatilitat σ_a^2. El model va ser acceptat per tothom després del treball de Black i Scholes [4] i per això en direm *model de Black-Scholes*.

El model del moviment brownià era, de fet, el proposat per Bachelier [2] per als mercats financers, ja abans que Einstein, però el postulava per als preus enlloc de fer-ho per als log-preus. Suposant gaussianitat per a $s(t) = \ln S(t)$, tal com es fa avui, s'evita que els preus puguin arribar a ser negatius, i a més els logaritmes transformen la multiplicació en suma. Més significativament, el postulat que la diferència $S(t+h) - S(t)$, amb h fix, tingui una llei independent del valor actual $S(t)$ no s'adiu amb la intuïció financera. Qui creuria, per exemple, que la probabilitat que una acció que avui val 100 passi a valer demà 75 (una pèrdua del 25 %) sigui la mateixa que la probabilitat que si avui val 200 demà passi a valer 175 (pèrdua del 12.5 %)?

El model que estem descrivint és estocàstic, per això no ens diu què passarà, sinó *què pot passar* i amb quina probabilitat, ens dona idea de com poden anar les coses. Una particularitat del model és que es pot *simular* de manera senzilla per a visualitzar escenaris futurs i analitzar si una estratègia d'inversió té possibilitats d'èxit. La figura 2 mostra l'evolució de l'Ibex els dos darrers anys (línia més gruixuda) juntament amb 10 escenaris alternatius que *a priori* eren igualment probables; els intervals de confiança mostren el creixement de la desviació estàndard com l'arrel quadrada del temps. Una altra propietat fonamental del model és que es pot *contrastar amb la realitat*, tal com han de ser tots els models científics. Avui està a l'abast de tothom obtenir dades històriques de cotitzacions borsàries amb què calcular les rendibilitats; aleshores podem acudir a l'estadística per obtenir un ampli ventall de proves que ens diran si realment les rendibilitats es comporten com una mostra d'observacions independents d'una distribució normal. A la secció 9 ho seguirem comentant.

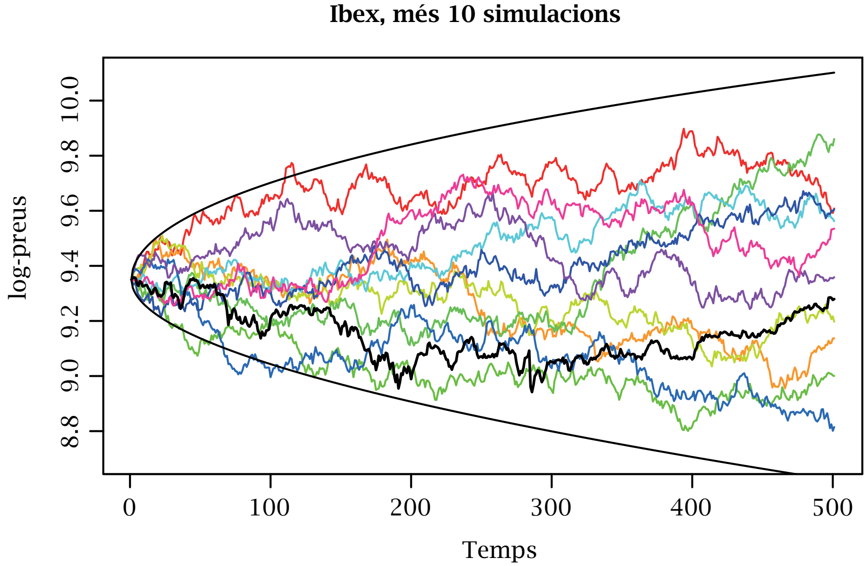

FIGURA 2: Ibex (línia gruixuda) des d'abril del 2015 a abril del 2017 i 10 simulacions alternatives. Les línies contínues són els intervals de confiança del 95 %.

3 Els derivats. Noció d'arbitratge

La gran revolució en el món de les finances es produeix amb l'aparició del primer mercat organitzat de derivats el 1973 a Chicago. El mateix any Black i Scholes publiquen el seu primer article sobre la valoració d'opcions sense arbitratge, que explicarem més endavant. El gran impacte que va produir aquesta publicació ha fet que els models amb què s'estudien avui els mercats de derivats segueixin el llenguatge establert en aquest article, que es basa en la versió a temps continu del model del qual hem parlat a la secció anterior, introduït per Samuelson el 1965. Robert Merton i Myron Scholes rebrien el 1997 el Premi Nobel per les seves contribucions a la valoració de derivats. Fischer Black va morir el 1995. Gran part del que segueix a continuació es pot trobar ampliat en les referències [1], [6], [9] i [11].

Per tenir una perspectiva històrica del moment recordem que el 15 d'agost del 1971 el president Nixon declara la no convertibilitat del dòlar en or. Des dels acords de Bretton Woods, el juliol del 1944, es mantenia la relació 35 $ per unça d'or, relació que era de 310 $/unça l'octubre del 2002 i de 1200 $/unça l'agost del 2016. El fet va comportar el creixement de la inflació i l'atur. En el període 1974–1975 la inflació era del 12 % als EUA; a l'Estat espanyol la inflació va pujar del 7 % el 1970, fins al 26 % el 1977. El març del 1973 es decideixen els tipus de canvi flotants i comença la pujada del marc alemany. Es produeix la crisi del petroli del 1973 i la suspensió de pagaments dels països en vies de desenvolupament.

El final de la paritat or/dòlar va portar grans oscil·lacions de preus en les matèries primeres i en els actius financers. Neix així la necessitat de protegir-se davant les grans oscil·lacions dels preus dels cereals, en particular del blat, molt important als EUA. Això es pot fer privadament mitjançant un *contracte a termini* (*forward*). Per exemple, entre un agricultor i un pastisser, que fixen abans de la sembra el preu a què el primer vendrà el blat al segon, un cop segat. L'agricultor s'assegura uns ingressos que li permeten fer inversions en terres, abonaments, material, etc. El pastisser pot comprometre's a unes vendes a preu fix a restaurants, hotels . . .

Un contracte a termini és doncs un contracte fet a temps zero pel qual ens obliguem a comprar/vendre a temps T un determinat actiu. Quin ha de ser el preu? Bé, si a temps zero l'actiu val $S(0)$, el preu just és $F = S(0)e^{rT}$, suposant que el rendiment del diner sense risc és r. En efecte, si $F \neq S(0)e^{rT}$, es pot fer negoci sense risc: si $F < S(0)e^{rT}$, una persona que té l'actiu el ven a preu $S(0)$, posa $S(0)$ al banc i signa el contracte de futur (com a comprador). A temps T, té $S(0)e^{rT}$ diners al banc, dels quals en gastarà F per tornar a tenir l'actiu. Ha passat de tenir l'actiu a tenir l'actiu més un benefici de $S(0)e^{rT} - F$. I si $F > S(0)e^{rT}$, algú que no té res pot guanyar diners sense córrer cap risc: demana $S(0)$ al banc, amb això compra l'actiu i ven un contracte de futur. A temps T, cobrarà F pel seu actiu i deurà $S(0)e^{rT}$ al banc, amb la qual cosa haurà fet un benefici de $F - S(0)e^{rT}$. Observem que estem fent tàcitament una hipòtesi, que és que en el mercat sempre podem operar sense limitacions i a la taxa lliure de risc.

Aquest «fer negoci sense risc» es coneix amb el terme *arbitratge*. Per entendre millor el concepte posem un altre exemple. Un industrial, al cap de 90 dies, ha de pagar un milió de lliures a un proveïdor. Per a disminuir la incertesa, farà, avui, un contracte a termini amb un banc per a comprar un milió de lliures d'aquí a $T = 90$ dies, a una determinada taxa de canvi F. Quina taxa de canvi F sembla justa? Mirem el preu d'una lliura esterlina en una publicació especialitzada. Podem llegir:

$$\begin{cases} \text{Avui} : S = 1.322 \text{ euros.} \\ \text{A 90 dies} : F = 1.333 \text{ euros.} \end{cases}$$

L'industrial pagarà la lliura esterlina a un preu lleugerament superior al d'avui; però, d'on surt aquest preu F? Té a veure amb la *diferència* entre els rendiments r, s del diner sense risc als Estats Units i al Regne Unit. Ha de ser $F = Se^{(r-s)T}$. Si no és així, podem fer *arbitratge*, negoci sense arriscar. En efecte, si $Fe^{sT} < Se^{rT}$, anirem a un banc anglès, demanarem X lliures en préstec, les convertim en XS euros que posem en un banc espanyol. Al mateix temps fem un contracte de futur a Espanya per a comprar Xe^{sT} lliures. A temps T tindrem XSe^{rT} euros al banc espanyol, dels quals XFe^{sT} els utilitzarem per a comprar Xe^{sT} lliures que tornarem al banc anglès per pagar el deute. Hem guanyat $X(Se^{rT} - Fe^{sT})$ euros sense arriscar res. I si $Fe^{sT} > Se^{rT}$, anirem a un banc espanyol i demanarem XSe^{-sT} euros en préstec, que utilitzarem per a comprar Xe^{-sT} lliures, que posarem en un banc anglès. Al mateix temps venem un contracte per a la compra de X lliures. A temps T, tindrem X lliures al banc anglès, que donarem al comprador del contracte a termini per XF euros. En aquest moment haurem de pagar XSe^{rT-sT} al banc espanyol, i ens queda un benefici net.

Hi ha contractes a termini sobre matèries primeres, or, plata ... fins arribar als *futurs* sobre índexs i productes financers. El 1992 s'obre a Barcelona i a Madrid el mercat espanyol de futurs financers, el MEFF. Per aquelles dates es construïa també per primer cop l'índex Ibex 35 de la Borsa espanyola. Les coses evolucionen de pressa després de les últimes crisis del 1987 i 1989. Es creen els primers fons d'inversió i la borsa s'obre als petits estalviadors.

Considerarem amb un cert detall un producte derivat concret, una *opció de compra o venda*. Una opció de compra (*call option*) d'un determinat actiu financer és un contracte fet a temps zero que dona al comprador el dret a comprar a temps de venciment T (*expiration date, maturity*) una unitat de l'actiu a preu K (*exercise price, strike price*). Hem d'emfatitzar el fet bàsic que és que en aquest tipus de contracte el comprador té el dret de comprar però no l'obligació de fer-ho, a diferència del contracte de futur. Així, si a temps T el preu de l'actiu és $S(T) > K$, el comprador exerceix l'opció, i el venedor li ha de vendre l'actiu a preu K. Si el preu de l'actiu és $S(T) < K$, l'opció no és exercida i no té cap valor. El venedor de l'opció corre un risc evident, perquè a temps T, si el comprador l'exerceix, haurà de vendre els actius per sota del preu de mercat. Naturalment, el comprador ha d'abonar al venedor una *prima* C per a tenir el dret de compra i que d'alguna manera serveixi al venedor per a cobrir-se del risc. Una *opció de venda* (*put option*) dona el dret a vendre. Les opcions *europees* només es poden exercir al venciment, les opcions *americanes* es poden exercir en qualsevol moment abans del venciment.

El comprador de l'opció pot ser el nostre industrial que fa una opció per a adquirir el milió de lliures a temps $T = 90$ dies; les comprarà amb independència de si la lliura ha pujat o baixat i el que busca és reduir la incertesa a canvi de pagar la prima. Però també pot ser un especulador que fa una aposta, que li costa C a temps $T = 0$; si $S(T) > K$ exerceix l'opció, compra a preu K i, venent immediatament a preu de mercat, fa un benefici de $S(T) - K$ (del qual ha de descomptar C). Si $S(T) < K$, no l'exerceix i ha perdut l'aposta (i C).

En general, els derivats serveixen per a cobrir riscos, detectar-los, traspassar-los i posar-los preu. Els riscos no desapareixen, es traslladen. Si inicialment serveixen per a protegir-se d'algun risc, automàticament serveixen per a invertir o per a especular i també serveixen per a moure més de pressa els diners (palanquejament). Els exemples més importants són els contractes a termini (*forwards*), els futurs, les opcions, les permutes financeres (*swaps*, que generalment serveixen per a canviar tipus fixos per variables), els CDS (swap de risc de crèdit, o, en anglès, *credit default swap*), etc.

Es poden distingir tres formes de reduir el risc, amb instruments financers específics: cobrir-se, assegurar-se o diversificar-se. Cobrir-se és reduir el risc de pèrdues elevades a canvi de reduir les possibilitats de guanys elevats. Assegurar-se vol dir canviar una pèrdua petita (prima) i segura a canvi de reduir les possibilitats d'una pèrdua futura elevada. Diversificar, fins allà on es pot, és reduir la variabilitat de la distribució de guanys i pèrdues tot mantenint la rendibilitat.

4 El valor d'una opció

La pregunta és llavors: quin ha de ser el valor de C? Això s'ha de decidir a partir del valor $S(0)$ de l'actiu a temps zero, de K, de T i, és clar, utilitzant un model. Si utilitzem el model descrit a la secció 2, en principi podríem raonar de la forma següent.

Segons aquest model, si l'actiu a temps zero val $S(0)$, la llei de $\ln S(T)$ és normal amb esperança $\ln S(0) + T\mu_a$ i desviació típica $\sqrt{T}\sigma_a$. El valor de l'opció en l'instant T, el benefici que en pot treure el comprador, és $\max(S(T) - K, 0)$, i hem d'esperar que valgui $E(\max(S(T) - K, 0))$, quelcom que podríem calcular perquè coneixem la llei de $\ln S(t)$ utilitzant la fórmula (6). Aleshores, sembla natural pensar que el preu que hem de demanar per l'opció en l'instant 0 sigui aquella quantitat que col·locada a temps zero al banc, sense risc, doni a temps T el valor de l'opció a temps T, això és,

$$e^{-rT}E(\max(S(T) - K, 0)).$$

En general, aquesta operació —la de calcular a temps zero el valor de quelcom que a temps T té un cert valor— s'anomena *descomptar*.

Bé, doncs malgrat que això ens pugui semblar natural, aquesta no és la solució correcta, perquè en general dona oportunitat d'arbitratge, de fer negoci sense risc. Per veure això, considerem una situació molt més senzilla on aplicarem un argument diferent, el correcte, i veurem que no porta al mateix resultat.

Suposem que $S(0) = 100$ i que el valor a temps $T = 1$ és

$$\begin{cases} S(1) = 150 & \text{amb probabilitat } p, \\ S(1) = 70 & \text{amb probabilitat } 1 - p. \end{cases}$$

El valor de p forma part del model, de la mateixa forma que en el model continu es postula la llei de $\ln S(T)$. Però com ara veurem, és irrellevant, tan sols intervindran els possibles valors de $S(1)$, però no pas p. Suposem que $K = 130$ i volem determinar el valor de la prima C. Podem pensar, com abans, que el comprador de l'opció és l'industrial que a temps $T = 1$ necessita 100 unitats d'una determinada divisa, que avui val 1 euro, i que d'aquí a un any haurà pujat a 1.5 o bé baixat a 0.70. L'industrial adquireix a un banc una opció per a comprar 100 unitats de la divisa a $T = 1$ amb cost $K = 130$, pagant una prima C, a determinar. Si ha pujat a 1.5, l'industrial exerceix l'opció i compra a 1.30 i, si ha baixat, no exerceix l'opció i compra a 0.70. Amb això, a canvi de pagar la prima, ha reduït la incertesa, el risc, perquè d'un rang d'oscil·lació de 70 a 150 sense l'opció ha passat a un rang de 70 a 130 amb l'opció.

Posem-nos en la posició del venedor, i volem dissenyar una estratègia per cobrir-nos del risc. Dissenyem una cartera amb y opcions venudes a preu C i x actius comprats a 100 cadascú, a temps zero. Després de signar el contracte, tindrem $Cy - 100x$ en *cash*, que posem al banc, i x actius. El valor d'aquesta cartera (opcions venudes i actius) a temps 1 depèn de si $S(1) = 150$ o $S(1) = 70$. En el primer cas, cada actiu val 150, però per cada opció hi perdem $150 - 130 = 20$ (la diferència entre el valor real de l'actiu a temps 1 i el preu K pel qual ens hem compromès a vendre'l), per tant tenim $150x - 20y$. En el segon cas, el comprador no exercirà les opcions, és com si no existissin i tenim un valor de $70x$. En resum, el valor de la cartera a temps $T = 1$ és

$$\begin{cases} 150x - 20y & \text{si } S(1) = 150, \\ 70x & \text{si } S(1) = 70, \end{cases}$$

mentre que tindrem $(Cy - 100x)(1 + r_a)$ al banc, on r_a designa el TAE anual. Si triem x, y de forma que aquests dos valors siguin iguals,

$$150x - 20y = 70x, \quad y = 4x$$

hem eliminat la incertesa. Observem que el valor de p no hi intervé pas. Aleshores, haurem fet un guany de

$$70x + (4xC - 100x)(1 + r_a) = x(1 + r_a)\left(\frac{70}{1 + r_a} - 100 + 4C\right),$$

on l'expressió E entre parèntesi ha de ser zero:

$$C = 25 - \frac{70}{4(1 + r_a)} = \frac{5(3 + 10r_a)}{2(1 + r_a)}.$$

Si C és diferent d'aquest valor, hi ha oportunitat d'arbitratge, perquè si $E > 0$, prenem x positiu, és a dir, comprem x accions i venem $4x$ opcions, i si $E < 0$, prenem x negatiu, és a dir, venem x accions i comprem $4x$ opcions.

Si raonéssim com abans, tindríem que el valor de l'opció a temps 1 és

$$\begin{cases} 20 & \text{si } S(1) = 150, \\ 0 & \text{si } S(1) = 70, \end{cases}$$

amb valor esperat $20p$ i trobaríem $C = \frac{20p}{1+r_a}$, que en general és diferent del valor anterior, el correcte.

Aquest exemple, tan senzill, conté, de fet, la clau de la solució en el cas general, tal com veurem a les seccions següents. La idea de muntar una cartera neutral al risc és *genialment senzilla*, com passa sovint en matemàtiques. Fixem-nos de moment que la solució per a C no depèn de la llei de $S(1)$, sinó que tan sols és conseqüència d'imposar la impossibilitat d'arbitratge. També ens ensenya que el venedor de l'opció no es pot quedar sense fer res després de cobrar la prima, sinó que ha de cobrir-se del risc dissenyant aquesta cartera. A la secció 8 tornarem a parlar d'aquesta idea de *cobertura*.

5 El teorema del no arbitratge. La probabilitat neutral al risc

A un probabilista, el fet que el càlcul de C en l'exemple anterior sigui independent de la llei de $S(1)$ no el pot deixar indiferent; ha de fer un esforç per a tornar-hi a introduir la probabilitat, per a defensar la professió. Això és possible fer-ho i ens portarà a un altre concepte interessant i clau, el de la *probabilitat neutral*.

Considerem un experiment amb M resultats possibles, $j = 1, 2, \ldots, M$, i que es poden fer N apostes sobre el resultat; a l'aposta $i = 1, 2, \ldots, N$, si surt j, hi ha un guany/pèrdua de $r_i(j)$.

Una *estratègia d'aposta* és un vector $X = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$, on x_i és la quantitat que es juga en la i-èsima aposta. Si surt j, el guany total és

$$R(j) = \sum_{i=1}^{N} x_i r_i(j).$$

En aquesta situació, tenim el resultat següent, la demostració del qual és una aplicació senzilla del teorema de dualitat en programació lineal.

Teorema. *O bé hi ha un vector de probabilitat $P = (p_1, p_2, \ldots, p_M)$ (és a dir, $p_1 + p_2 + \cdots + p_M = 1$) tal que*

$$\sum_{j=1}^{M} p_j r_i(j) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

o bé hi ha una estratègia d'aposta $X = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ tal que

$$\sum_{i=1}^{N} x_i r_i(j) > 0, \quad j = 1, 2, \ldots, M.$$

És a dir, o bé hi ha unes probabilitats $p_j = P(X = j)$ de forma que totes les apostes són justes (amb esperança de guany zero) o bé hi ha una estratègia que dona un guany segur.

Apliquem això a l'exemple anterior. En els termes del teorema anterior, el resultat de l'experiment és el valor de $S(1)$. Hi ha dos resultats possibles,

$S(1) = 150$ o $S(1) = 70$ i dues apostes per fer: comprar un actiu (les 100 unitats de la divisa) o comprar una opció a temps zero. El teorema ens diu que no hi ha possibilitat d'arbitratge si hi ha p, $0 < p < 1$, de forma que el valor esperat de les dues apostes és zero (designant p la probabilitat que $S(1) = 150$).

El valor descomptat d'un actiu a temps 1 és

$$\begin{cases} \dfrac{150}{1+r_a} & \text{si } S(1) = 150, \\ \dfrac{70}{1+r_a} & \text{si } S(1) = 70. \end{cases}$$

L'esperança de guany comprant un actiu és

$$\frac{p150 + (1-p)70}{1+r_a} - 100 = p\frac{80}{1+r_a} - 100 + \frac{70}{1+r_a},$$

que val zero si $p = \frac{3+10r_a}{8}$.

El valor d'una opció a temps 1 és $\max(S(1) - 130, 0)$ i, per tant, descomptat és

$$\begin{cases} \dfrac{20}{1+r_a} & \text{si } S(1) = 150, \\ 0 & \text{si } S(1) = 70, \end{cases}$$

i l'esperança de guany d'aquesta estratègia és

$$\frac{p20}{1+r_a} - C = \frac{3+10r_a}{8}\frac{20}{1+r_a} - C,$$

d'on obtenim, si volem que l'esperança de guany sigui zero, que $C = \frac{5(3+10r_a)}{2(1+r_a)}$, com abans. És a dir, C ha de ser, tal com havíem intuït inicialment, el valor esperat de l'opció a temps 1, descomptat a temps zero, però *respecte de la probabilitat neutral al risc*.

Aquesta observació —la reaparició d'una probabilitat imposada pel no arbitratge— és fonamental i ens permetrà passar d'aquest exemple tan senzill al cas general.

6 Aproximació per un procés binomial multiperíode

El que volem fer ara és aproximar l'increment de $S(0)$ a $S(T)$ per molts salts, N, com el considerat a la secció anterior, és a dir, que en cada etapa l'actiu només tingui dues possibilitats, o baixar o pujar. Prenent logaritmes, i com que el model postula que $\ln S(T) - \ln S(0)$ té llei normal d'esperança $T\mu_a$ i desviació típica $\sigma_a\sqrt{T}$, això correspon a aproximar una llei normal per sumes de variables independents idènticament distribuïdes que només prenen dos valors. Es tracta, per tant, d'un cas particular del teorema central del límit.

Sigui doncs X una variable normal de mitjana μ_a i variància σ_a^2 (després ja canviarem μ_a per $T\mu_a$ i σ_a^2 per $T\sigma_a^2$). La volem aproximar per

$$Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N,$$

on les Y_i són independents, cada Y_i amb llei dicotòmica (tipus Bernoulli) $Y_i = +\varepsilon$ amb probabilitat q, $Y_i = -\varepsilon$ amb probabilitat $1 - q$. Podem pensar en un passeig aleatori, on en cada moment $i = 1, 2, \dots, N$, ens desplacem a la dreta ε centímetres amb probabilitat q o cap a l'esquerra $-\varepsilon$ centímetres amb probabilitat $1 - q$. Per veure quina és la tria correcta de ε, q igualarem les esperances i variàncies de X i $Y_1 + \cdots + Y_N$. Com que $E(Y_i) = \varepsilon(2q - 1)$ i $E(Y_i^2) = \varepsilon^2$, tenim $\mathrm{Var}(Y_i) = \varepsilon^2(1 - (2q - 1)^2) = 4\varepsilon^2 q(1 - q)$ i trobem

$$\mu_a = N\varepsilon(2q - 1), \quad \sigma_a^2 = N\varepsilon^2 4q(1 - q).$$

Llavors

$$\frac{2q - 1}{4q(1 - q)} = \frac{\mu_a \varepsilon}{\sigma_a^2},$$

per tant hem de prendre $\varepsilon = \lambda\sigma_a$, on λ no té unitats i cal triar q de forma que

$$\frac{2q - 1}{4q(1 - q)} = \lambda\frac{\mu_a}{\sigma_a}.$$

Si $\tau = \lambda\frac{\mu_a}{\sigma_a}$, la solució exacta és

$$q = \frac{2\tau - 1 + \sqrt{1 + 4\tau^2}}{4\tau}, \text{ amb } \sqrt{1 + 4\tau^2} - 1 = \frac{2}{N}\frac{\mu_a^2}{\sigma_a^2}.$$

Com que N és gran, τ és petit i podem fer, per simplificar, l'aproximació $\sqrt{1 + 4\tau^2} \approx 1 + 2\tau^2$, amb la qual cosa triem

$$q = \frac{1}{2}(1 + \tau), \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{N}}\frac{\mu_a}{\sigma_a}, \quad \varepsilon = \frac{\sigma_a}{\sqrt{N}}.$$

El teorema central del límit afirma que quan $N \to \infty$,

$$\frac{(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N) - E(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Y_1 + \cdots + Y_N)}} \longrightarrow Z,$$

on Z denota la llei normal estàndard i la convergència és en distribució (de fet, es tracta de la versió del teorema central del límit per a esquemes triangulars, perquè la llei de cada Y_i també depèn de N). Amb la tria de q anterior hom té

$$E(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N) = \varepsilon N(2q - 1) = \mu_a,$$

$$\mathrm{Var}(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N) = \sigma_a^2\left(1 - \frac{1}{N}\frac{\mu_a^2}{\sigma_a^2}\right) \longrightarrow \sigma_a^2,$$

amb la qual cosa quan $N \to \infty$,

$$Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N \longrightarrow N(\mu_a, \sigma_a^2).$$

Això s'anomena l'*aproximació de la llei normal per un passeig aleatori*.

Apliquem-ho al nostre cas; canviem μ_a per $T\mu_a$ i σ_a^2 per $T\sigma_a^2$i posem $\Delta = \frac{T}{N}$. Tenim N variables $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$ independents amb la mateixa llei

$$\begin{cases} Y_i = +\sigma_a\sqrt{\Delta} & \text{amb probabilitat } q = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{\mu_a}{\sigma_a}\sqrt{\Delta}\right), \\ Y_i = -\sigma_a\sqrt{\Delta} & \text{amb probabilitat } 1 - q. \end{cases}$$

Aquest passeig aleatori en els log-preus es tradueix en el fet que cada Δ unitats de temps el preu de l'actiu puja per un factor u amb probabilitat q o baixa per un factor d amb probabilitat $1 - q$ amb $u = e^{\sigma_a\sqrt{\Delta}}$ i $d = e^{-\sigma_a\sqrt{\Delta}}$, és a dir,

$$S_{i+1} = \begin{cases} uS_i & \text{amb probabilitat } q, \\ \dfrac{1}{u}S_i & \text{amb probabilitat } 1 - q, \end{cases} \qquad i = 0, \ldots, N - 1.$$

Aquest procés discretitzat s'anomena *procés binomial en N etapes*, i hem vist que quan $N \to \infty$ té per límit el brownià geomètric.

7 La fórmula de Black-Scholes

El que hem après abans a la secció 5 és que la probabilitat q ha de ser substituïda a cada pas per la probabilitat neutral al risc p. Calculem-la.

L'estratègia de comprar un actiu a l'instant i i vendre'l a l'instant $i + 1$ tindria una esperança de guany

$$\frac{puS_i + (1 - p)\,dS_i}{1 + r\Delta} - S_i,$$

que és zero quan

$$p = \frac{1 + r\Delta - d}{u - d} = \frac{1 + r\Delta - e^{-\sigma_a\sqrt{\Delta}}}{e^{\sigma_a\sqrt{\Delta}} - e^{-\sigma_a\sqrt{\Delta}}}.$$

La impossibilitat d'arbitratge ens ha fet reemplaçar q per p. Desfent el camí, considerem, per tant, novament les S_i i $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$ amb q canviat per p. La variable $Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N$, quan $N \to \infty$, tindrà per límit una llei normal de paràmetres

$$\lim_N \Big(E(Y_1) + \cdots + E(Y_N)\Big) = \lim_N N\sigma_a\sqrt{\Delta}(2p - 1),$$
$$\lim_N N\sigma_a^2\Delta 4p(1 - p),$$

límits que ara procedim a calcular. Posem $s = \sqrt{\Delta}$ i $\Delta = s^2$; utilitzant el desenvolupament de Taylor de l'exponencial trobem que

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{r - \frac{\sigma_a^2}{2}}{\sigma_a} s + O(s^2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{r - \frac{\sigma_a^2}{2}}{\sigma_a}\sqrt{\frac{T}{N}} + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Per tant, els límits anteriors valen

$$\lim_N N\sigma_a\sqrt{\frac{T}{N}}\left(\frac{r - \frac{\sigma_a^2}{2}}{\sigma_a}\sqrt{\frac{T}{N}} + O\left(\frac{1}{N}\right)\right) = \alpha T, \quad \alpha = \left(r - \frac{\sigma_a^2}{2}\right),$$

$$\lim_N 4N\sigma_a^2\frac{T}{N}\left(\frac{1}{4} + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\right) = T\sigma_a^2.$$

En conseqüència, sota la probabilitat neutral al risc, $S(t)$ és un brownià geomètric de paràmetres α, σ_a. Això vol dir que, conegut $S(0)$, podem escriure $S(T) = S(0)e^W$, amb W normal de mitjana αT i variància $\sigma_a^2 T$, i la conclusió és que el cost C de l'opció que no dona lloc a arbitratge és el valor descomptat del valor esperat a temps T,

$$C = e^{-rT}E(\max(S(0)e^W - K, 0)),$$

amb $W = \alpha T + \sigma_a\sqrt{T}Z$, i Z normal estàndard.

Es pot donar una expressió explícita en termes de Φ, la funció de distribució de la normal estàndard,

$$\Phi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{s} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-s}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx.$$

Utilitzant (6)

$$C = e^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\max(S(0)e^{\alpha T + \sigma_a\sqrt{T}x} - K, 0)\,e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx.$$

La integral és en l'interval definit per $\alpha T + \sigma_a\sqrt{T}x > \ln\frac{K}{S(0)}$, és a dir, $x > \eta = \frac{\ln\frac{K}{S(0)} - \alpha T}{\sigma_a\sqrt{T}}$; per tant,

$$C = e^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\eta}^{\infty}(S(0)e^{\alpha T + \sigma_a\sqrt{T}x} - K)e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx =$$

$$= -e^{-rT}K\Phi(-\eta) + S(0)e^{-rT+\alpha T}\int_{\eta}^{\infty} e^{\sigma_a\sqrt{T}x - \frac{1}{2}x^2}\,dx.$$

A la darrera integral completem quadrats a l'exponent i fem el canvi $y = x - \sigma_a\sqrt{T}$ per a obtenir finalment

$$C = C(K, T, r, \sigma_a, S_0) = -e^{-rT}K\Phi(-\eta) + S(0)e^{-rT+\alpha T+\frac{1}{2}\sigma_a^2 T}\Phi(-\eta + \sigma_a\sqrt{T}) =$$

$$= -e^{-rT}K\Phi(-\eta) + S(0)\Phi(-\eta + \sigma_a\sqrt{T}).$$

Habitualment s'utilitza la notació

$$\omega = -\eta + \sigma_a\sqrt{T} = \frac{\log(\frac{S(0)}{K}) + rT + \sigma_a^2\frac{T}{2}}{\sigma_a\sqrt{T}},$$

de manera que la fórmula de Black-Scholes s'escriu finalment

$$C(K,T,r,\sigma_a,S_0) = S(0)\Phi(\omega) - Ke^{-rT}\Phi(\omega - \sigma_a\sqrt{T}). \tag{9}$$

8 Equacions diferencials estocàstiques. L'equació de Black-Scholes

El que ens plantegem en aquesta secció és reformular els models de Samuelson i de Black-Scholes en termes d'equacions diferencials. El que farem serà mirar-nos el preu C de l'opció com a funció de T i S_0 (que conseqüentment ara denotarem per S), suposant que els altres tres paràmetres són constants. Veurem que compleix una equació en derivades parcials, l'equació de Black-Scholes, que resulta ser matemàticament equivalent a l'equació de difusió de la calor. Aquest model permet retrobar la fórmula per a C, però alhora permet comprendre, en temps continu, l'estratègia de cobertura.

Com que el model inclou una component estocàstica, no determinista, anirem a parar a una *equació diferencial estocàstica*. El marc matemàtic per a fer-ne un tractament rigorós és sofisticat, però aquí intentarem explicar-ne l'essencial sense tecnicismes. Parlar d'equacions diferencials és parlar de derivades, de taxes de canvi, de les variables. La derivada d'una funció determinista $f(t)$ és quelcom que ens permet entendre l'essencial dels petits increments,

$$f(t+dt) - f(t) \approx f'(t)\,dt.$$

Aquí, l'objecte variable és un procés estocàstic $X(t)$ que depèn del temps; el que varia amb t és una variable aleatòria. Però no parlarem de derivades, sinó que intentarem entendre directament l'estructura dels petits increments, el que podríem anomenar la *diferencial estocàstica*. El procés invers en el cas determinista, el pas de la derivada a la primitiva, es fa amb la teoria de la integració de Riemann. En el cas estocàstic aquest pas invers es fa amb una eina matemàtica anomenada la *integral estocàstica*, que aquí no necessitarem.

Comencem amb el procés de Wiener $W(t)$ de variància 1. Per a un increment Δt, $W(t+\Delta t) - W(t)$ és una variable normal d'esperança zero i variància Δt, que escriurem

$$\Delta W(t) = \sqrt{\Delta t}Z,$$

on Z és normal estàndard (estrictament, és una variable que depèn de t amb llei $N(0,1)$). Això es compleix tant si Δt és petit com si és gran; el fet que la suma de variables normals independents també ho sigui (amb esperança la suma d'esperances i variància la suma de variàncies) implica, de fet, que si val per a Δt petits també val per a Δt grans. Fent $\Delta t \to 0$ escrivim

$$dW(t) = \sqrt{dt}Z.$$

Per tant, hom pot definir el procés de Wiener com aquell que té increments estacionaris independents i compleix l'equació anterior. Un brownià generalizat $B(t)$ de tendència μ_a i variància σ_a^2 és el que compleix

$$dB(t) = \mu_a\,dt + \sigma_a\sqrt{dt}Z = \mu_a\,dt + \sigma_a\,dW(t).$$

Hem de pensar que $\mu_a\,dt$ és la part determinista i $\sigma_a\sqrt{dt}Z$ la part estocàstica, de mitjana zero. Fixem-nos que $\frac{dB}{dt}$ no existeix en cap sentit (és a dir, les variables aleatòries $\frac{\Delta B}{\Delta t}$ no tenen límit en el sentit de convergència en probabilitat ni en cap altre; de fet, una realització, una trajectòria $X_\omega(t)$ del procés, no és gairebé mai derivable). Ara bé, sí que és cert que un procés de Wiener té trajectòries contínues, quasi segurament. Fent un parèntesi, comentem que Einstein suposava, igual que Bachelier, que increments independents i estacionaris, amb $w_0 = 0$, automàticament donaven trajectòries contínues quasi segurament. Realment no és així, com va posar de manifest Paul Lévy. Amb les hipòtesis anteriors, gaussianitat implica trajectòries contínues; increments independents i trajectòries contínues també impliquen gaussianitat. Però existeixen processos amb increments independents i estacionaris, amb $w_0 = 0$, que no són gaussians i no tenen trajectòries contínues. En física la hipòtesi de continuïtat de les trajectòries és del tot necessària; pensem, per exemple, en el gra de pol·len. En economia les coses canvien, ja que és perfectament assumible que els preus d'un mercat financer sofreixin salts. Actualment s'han recuperat per a les finances resultats de Lévy sobre processos amb increments independents i estacionaris, els anomenats *processos de Lévy*, que fa un temps eren simples curiositats matemàtiques.

Mirem ara com canvia un brownià geomètric com $S(t)$. Recordem que, conegut $S(t)$, $\ln S(t+\Delta t) - \ln S(t)$ té llei normal d'esperança $\mu_a \Delta t$ i variància $\sigma_a^2 \Delta t$, és a dir, $S(t+\Delta t) = S(t)e^{\mu_a\,\Delta t + \sigma_a\sqrt{\Delta t}Z}$; per tant,

$$S(t+\Delta t) - S(t) = S(t)\left(e^{\mu_a\,\Delta t + \sigma_a\sqrt{\Delta t}Z} - 1\right).$$

Utilitzant el desenvolupament de Taylor de l'exponencial trobem que

$$\frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{S(t)} = \mu_a\,\Delta t + \sigma_a\sqrt{\Delta t}Z + \frac{1}{2}(\mu_a\,\Delta t + \sigma_a\sqrt{\Delta t}Z)^2 + \cdots,$$

$$\frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{S(t)} = \mu_a\,\Delta t + \sigma_a\sqrt{\Delta t}Z + \frac{1}{2}\sigma_a^2\Delta t Z^2 + \\ + \text{ termes d'ordre superior a } \Delta t. \qquad (10)$$

Què és l'essencial d'aquest desenvolupament, quina és *la diferencial estocàstica*? Si analitzem el cas del brownià generalitzat, veiem que la part determinista té escala dt mentre que la part estocàstica té mitjana zero i escala $\sqrt{dt}$. Això és el que aquí prendrem com a definició de diferencial estocàstica: si $V(S,t)$ és qualsevol funció de S, t, la seva diferencial $dV(t)$ s'obté fent un petit increment Δt a t, obtenim un desenvolupament de $V(S(t+\Delta t),t) - V(S(t),t)$ on hi haurà termes en Δt i en $\sqrt{\Delta t}$ tan deterministes com estocàstics (on interpretem que els termes estocàstics tenen tots esperança zero, dit d'una altra manera incorporem l'esperança als termes deterministes) i en el límit quan $\Delta t \to 0$, ens quedem solament amb els termes en Δt deterministes i els termes en $\sqrt{\Delta t}$ estocàstics.

Apliquem aquesta definició al desenvolupament (10). Pel que fa a tot el que segueix, hem de recordar que tractem amb lleis de variables *conegut* $S(t)$. Els dos primers termes clarament entren a la diferencial; sobre el tercer, observem que és un terme estocàstic amb esperança $\frac{1}{2}\sigma_a^2\Delta t$, perquè $E(Z^2) = E(Z)^2 + \mathrm{Var}(Z) = 1$; per tant, escrivim

$$\frac{1}{2}\sigma_a^2\Delta t Z^2 = \frac{1}{2}\sigma_a^2\Delta t + \frac{1}{2}\sigma_a^2\Delta t(Z^2 - 1).$$

El darrer terme és estocàstic amb mitjana zero i d'ordre Δt i per tant, és d'ordre superior i l'hem de descartar (estrictament, hom pot veure que tendeix a zero en norma quadràtica). Dit d'una altra manera, podem pensar que $\frac{1}{2}\sigma_a^2\Delta t Z^2$ es fa més i més determinista igual a la seva esperança quan Δt es fa petit. Tot plegat dona

$$\frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{S(t)} = \left(\mu_a + \frac{1}{2}\sigma_a^2\right)\Delta t + \sigma_a\sqrt{\Delta t}Z + \text{ termes d'ordre superior,}$$

que escrivim, fent $\Delta t \to 0$,

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \left(\mu_a + \frac{1}{2}\sigma_a^2\right)dt + \sigma_a\sqrt{dt}Z,$$

o també

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \left(\mu_a + \frac{1}{2}\sigma_a^2\right)dt + \sigma_a\,dW(t).$$

Aquesta és l'equació diferencial estocàstica que governa el brownià geomètric. Estrictament parlant diu que la llei de $dS(t)$, conegut $S(t)$, és $S(t)(\mu_a + \frac{1}{2}\sigma_a^2)\,dt + S(t)\sigma_a\,dW(t)$. Prenent esperances trobem

$$E(dS(t)|S(t)) = S(t)\left(\mu_a + \frac{1}{2}\sigma_a^2\right)dt,$$

on el terme esquerre és l'esperança de $dS(t)$ condicionada per $S(t)$. Tornant a prendre esperances, i utilitzant que $E(E(X|Y)) = E(X)$ tenim que

$$E(dS(t)) = E(S(t))\left(\mu_a + \frac{1}{2}\sigma_a^2\right)dt,$$

que és l'equació determinista

$$\frac{d(E(S(t)))}{dt} = E(S(t))\left(\mu_a + \frac{1}{2}\sigma_a^2\right),$$

de solució $E(S(t)) = S(0)e^{(\mu_a + \frac{1}{2}\sigma_a^2)t}$. El resultat és coherent amb el que havíem vist a (7).

Un cop vista l'equació diferencial estocàstica satisfeta pels preus $S(t)$, podem analitzar com varia instantàniament el valor V de qualsevol producte financer la incertesa del qual només depèn de S (hom diu *contingent amb S*). Pensem, per tant, quina és la taxa de variació de V en un cert moment t quan l'actiu val $S(t)$. Hem de considerar l'increment ΔV en un interval de temps Δt petit, fer $\Delta t \to 0$ i quedar-nos solament amb els termes deterministes d'ordre dt i els estocàstics d'ordre $\sqrt{dt}$. Per la fórmula de Taylor

$$\Delta V = \frac{\partial V}{\partial S}\Delta S + \frac{\partial V}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(\Delta S)^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial t}(\Delta S)(\Delta t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}(\Delta t)^2 + \cdots$$

Tenim que $\Delta S = \mu_a S \Delta t + \sigma_a S Z \sqrt{\Delta t}$; per tant, conservant tan sols els termes en Δt o $\sqrt{\Delta t}$, resulta

$$\Delta V = \frac{\partial V}{\partial S}(\mu_a S \Delta t + \sigma_a S Z \sqrt{\Delta t}) + \frac{\partial V}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(\mu_a S \Delta t + \sigma_a S Z \sqrt{\Delta t})^2 + \cdots =$$

$$= \frac{\partial V}{\partial S}(\mu_a S \Delta t + \sigma_a S Z \sqrt{\Delta t}) + \frac{\partial V}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma_a^2 S^2 Z^2 \Delta t + \cdots$$

Ara bé, com abans, la variable $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma_a^2 S^2 Z^2 \Delta t$, conegut $S(t)$, la descomponem com a suma de la seva esperança, que és $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma_a^2 S^2 \Delta t$, més un terme estocàstic d'ordre Δt, que desapareix quan fem $\Delta t \to 0$. Amb tot plegat trobem que la variació de V és

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\mu_a S + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma_a^2 S^2\right) dt + \frac{\partial V}{\partial S}\sigma_a S\, dW.$$

Aquesta derivació és un cas particular, simplificat, del que es coneix com a *fórmula d'Itô* en el càlcul diferencial estocàstic. L'observació que la variació dC té exactament la mateixa component dW d'incertesa que S serà important en el que segueix.

Tot seguit aplicarem aquest llenguatge del càlcul diferencial estocàstic per trobar novament el cost $C(S, T)$ d'una opció, suposant com abans que perseguim que no hi hagi oportunitat d'arbitratge. Farem exactament el mateix que abans hem fet a la secció 4, posant-nos en la situació del venedor d'opcions i cobrint-nos del risc. A l'instant $t_0 = 0$, formem una cartera consistent en b_0 opcions venudes i a_0 actius del subjacent. Aquesta cartera l'anirem redistribuint, comprant o venent les opcions i els actius instantàniament, de manera que a l'instant t tindrem $a(t)$ actius i $b(t)$ opcions, $a(0) = a_0$, $b(0) = b_0$. I triarem $a(t)$, $b(t)$ de forma que es compleixin dues coses: que no tingui risc mentre evoluciona i que sigui autofinançada. Això darrer vol dir que en cada instant els increments $da(t)$, $db(t)$ es compensen en el sentit que

$$C(S(t), t)\, db(t) + S(t)\, da(t) = 0.$$

Aquesta equació ens dona la proporció entre da i db en cada instant. Aquesta cartera té un valor a l'instant t donat per $\Pi(t) = b(t)C(S(t),t) + a(t)S(t)$. Com que és autofinançada, té variació

$$d\Pi = b\,dC + a\,dS + C\,db + S\,da = b\,dC + a\,dS,$$

i utilitzant les equacions per a dC, dS, i que tenen *la mateixa part estocàstica* veiem que

$$d\Pi = b\left(\frac{\partial C}{\partial S}\mu_a S + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma_a^2 S^2\right) dt + b\frac{\partial C}{\partial S}\sigma_a S\,dW + a(\mu_a S\,dt + \sigma_a S\,dW),$$

$$d\Pi = \left(\left(b\frac{\partial C}{\partial S} + a\right)\mu_a S + b\frac{\partial C}{\partial t} + b\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma_a^2 S^2\right) dt + \left(b\frac{\partial C}{\partial S} + a\right)\sigma_a S\,dW.$$

Per tal que no tingui risc triem $a = -b\frac{\partial C}{\partial S}$ i aleshores aquesta cartera evolucionarà determinísticament segons

$$d\Pi = b\left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma_a^2 S^2\right) dt.$$

Ara bé, com que ara no hi ha incertesa, el rendiment de Π hauria de ser el del diner sense risc, a taxa d'interès r, és a dir, $d\Pi = r\Pi\,dt$, d'on s'obté l'equació en derivades parcials

$$b\left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma_a^2 S^2\right) dt = rb\left(C - S\frac{\partial C}{\partial S}\right) dt,$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rS\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma_a^2 S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = rC.$$

Aquesta és *l'equació de Black-Scholes*, satisfeta per $C = C(S,t)$, si volem que no hi hagi possibilitat d'arbitratge. El que es tracta ara és simplement de trobar la solució que compleix $C(S,T) = \max(S-K,0)$. Fent uns canvis de funció i de variable convenients (que inclouen canviar la direcció temporal), aquest problema és equivalent al de la difusió de la calor, és a dir, el de resoldre l'equació

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t), u(x,0) = f(x).$$

La solució d'aquesta equació és la convolució de la dada inicial f amb el nucli de difusió gaussià

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}}\,dy.$$

Desfent tots els canvis de variable i de funció s'arriba a l'expressió trobada a (9).

9 Entre la teoria i la pràctica

A les seccions anteriors hem explicat un model per als actius financers i l'hem utilitzat per a obtenir l'equació de Black-Scholes.

Ara bé, els actius financers no es comporten exactament com els models que fem servir per a estudiar-los. Entre els models matemàtics i la realitat sempre hi ha desajustos, que no ens han d'impedir seguir utilitzant models perquè constitueixen una bona forma de comprendre el món real. Fischer Black, parlant de la seva fórmula, deia que el sorprenia que captés tant l'interès de la gent. Ho atribuïa a la simplicitat de les hipòtesis, tot i considerar-les poc realistes. Afegia que el model era bo com a primera aproximació i recomanava que abans de buscar una nova fórmula es treballés en nous mètodes d'estimar la volatilitat.

Els actius financers sobre els quals es contracten derivats presenten anomalies ben descrites a la literatura (vegeu [5]), que es resumeixen en tres punts: primer, la distribució de les rendibilitats presenta més valors extrems que els que prediu la distribució normal; després, a través de les estimacions s'observen volatilitats que no són constants sinó més aviat estocàstiques, i, finalment, s'observen dependències entre els quadrats (o els valors absoluts) de les rendibilitats, tot i ser aquestes essencialment no correlacionades (recordem que si unes certes variables aleatòries són independents, funcions qualssevol de les mateixes variables també ho són).

Observant rendibilitats diàries queda clar que la hipòtesi de normalitat no es compleix; tot i això, si utilitzem el model (3) per a rendibilitats mensuals, el teorema central del límit fa que el comportament s'ajusti prou bé al model normal. Podríem dir que a mitjà termini la hipòtesi de normalitat no és restrictiva, encara que en fallar la hipòtesi exacta s'obre la porta a un problema important. Sota normalitat la no correlació és equivalent a la independència però en general el resultat no és cert: teòricament és possible que les rendibilitats siguin no correlacionades però que hi hagi una certa dependència entre elles, com havíem explicat. Això porta al debat del que en termes econòmics s'anomena l'*eficiència dels mercats*.

9.1 Eficiència dels mercats

Seguint Fischer Black, direm que un mercat és eficient per a un actiu si no poden obtenir beneficis les persones que no tenen informació especial sobre la companyia, i si és difícil obtenir-ne fins i tot a persones que tenen informació especial, perquè el preu s'ajusta ràpidament al seu valor tan aviat com la informació esdevé disponible.

L'eficiència dels mercats és fonamental per a saber si es pot predir el comportament futur dels actius, que és una peça clau de la teoria. En àmbits econòmics es parla de la «hipòtesi del mercat eficient» en tres sentits: l'eficiència feble correspon a la impossibilitat d'obtenir beneficis a partir de tota la informació històrica dels preus o de les rendibilitats; l'eficiència semiforta afirma aquesta impossibilitat quan també s'incorpora tota la informació pública disponible; l'eficiència forta inclou també la impossibilitat per a tota la informació (pública o privada) coneguda per qualsevol participant del mercat. La hipòtesi d'eficiència ha estat defensada pels investigadors més prestigiosos, des d'Eugene Fama a Fischer Black.

Aquests conceptes es formulen matemàticament de la manera següent: l'eficiència feble correspon a la no existència d'autocorrelació entre les rendibilitats i l'eficiència forta, a la independència d'aquestes rendibilitats. L'eficiència semiforta seria una situació intermèdia que s'anomena *diferència de martingala* i que no tractarem aquí.

Per aclarir una mica com s'analitza aquest concepte, introduirem algunes idees dels processos estacionaris. Es diu que una sèrie temporal $\{y_t\}$ (una família de variables aleatòries indexades per temps discret) és estacionària si es compleixen les hipòtesis següents:

1. L'esperança és constant per a tot t, $E[y_t] = \mu$.
2. La variància també és constant per a tot t, $V[y_t] = \gamma_0$.
3. Les autocovariàncies només depenen de la distància temporal entre les observacions, i no depenen del temps t, $\text{cov}[y_t, y_{t+k}] = \gamma_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Un passeig aleatori (8) no compleix cap de les hipòtesis de procés estacionari, en canvi sí que les compleix el procés format per les seves diferències, les rendibilitats $\{r_t\}$; vegeu (3). Aquest punt marca una diferència substancial entre els models que s'utilitzen en economia (processos estacionaris) i els que s'utilitzen en finances (passeigs aleatoris); s'acostuma a dir que en economia es poden fer previsions però no pas en finances.

El procés estacionari més representatiu és l'anomenat *procés autoregressiu d'ordre* 1, AR(1). Suposant, per simplificar, que la tendència és zero, un procés AR(1) s'escriu:

$$y_t = \rho\, y_{t-1} + \varepsilon_t, \tag{11}$$

on les innovacions ε_t es distribueixen com una normal amb mitjana zero i variància σ^2, i $|\rho| < 1$. Escrivint cada observació en termes de l'anterior obtenim de forma recurrent

$$y_t = \varepsilon_t + \rho\,\varepsilon_{t-1} + \cdots + \rho^n\,\varepsilon_{t-n} + \rho^{n+1}\,y_{t-n-1}.$$

És fàcil veure que les autocorrelacions són

$$\text{corr}(y_t, y_{t+k}) = \frac{\text{cov}[y_t, y_{t+k}]}{\gamma_0} = \rho^k.$$

Calculem ara la variància marginal (no condicional)

$$V[y_t] = (1 + \rho^2 + \cdots + \rho^{2n} + \cdots)\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{1-\rho^2}.$$

Si $\rho = 1$, que és el cas del passeig aleatori, la variància es fa infinita i només podem parlar de la variància condicional, fixat el valor present, s_0.

Diguem de passada que el procés AR(1) és un procés de Markov, en el sentit que el passat no aporta cap informació sobre el futur que no estigui recollida en el present; ho podem veure en la fórmula (11), on y_t només depèn de y_{t-1}, tot i que les correlacions amb observacions anteriors no són pas zero. Això en general s'expressa en les *autocorrelacions parcials*. Les autocorrelacions i les autocorrelacions parcials (de les quals no seguirem parlant) poden estimar-se a partir de la mostra d'un procés i proporcionen els *correlogrames*, que són una radiografia del model subjacent i en molts casos permeten identificar-lo.

Ens centrarem ara a analitzar la sèrie de l'Ibex 35 considerada anteriorment per tal de veure fins a quin punt s'ajusta a un passeig aleatori. Volem contrastar empíricament si les rendibilitats són realment no correlacionades, com indica la hipòtesi feble de mercat eficient, i fins i tot si les rendibilitats són independents, com diu la hipòtesi forta. Per a contrastar si l'autocorrelació corresponent a un cert retard és zero ($\rho_k = 0$), podem utilitzar el resultat asimptòtic

$$\sqrt{n}(\hat{\rho}_k - \rho_k) \approx N(0,1),$$

on $\hat{\rho}_k$ és l'autocorrelació estimada de la forma habitual.

En la figura 3 hi ha dibuixades les autocorrelacions empíriques fins a l'ordre 15 (segments verticals) de les rendibilitats de l'Ibex (primer gràfic) i de les rendibilitats de l'Ibex elevades al quadrat (segon gràfic). Les línies horitzontals de punts marquen els intervals de confiança del 99% a partir del resultat asimptòtic anterior.

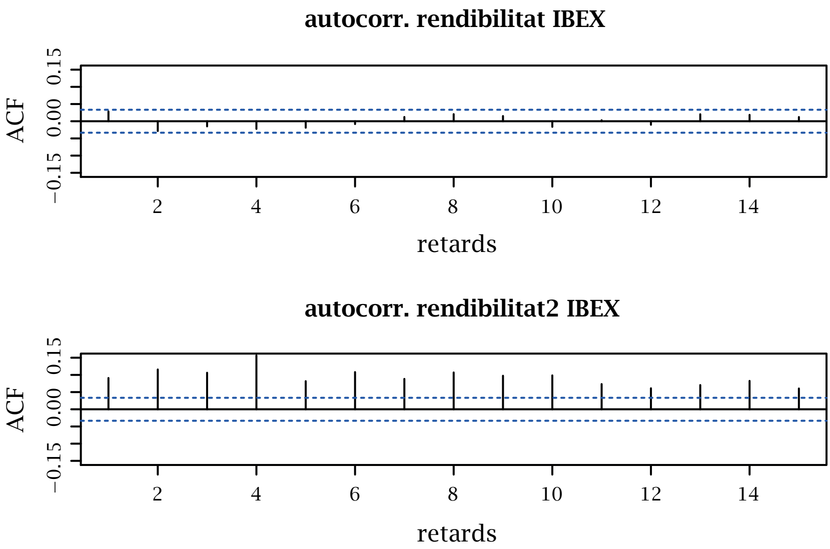

FIGURA 3: Autocorrelacions empíriques fins a l'ordre 15 (segments verticals) de les rendibilitats de l'Ibex (gràfic superior) i de les rendibilitats de l'Ibex al quadrat (gràfic inferior).

Les autocorrelacions de les rendibilitats de l'Ibex són totes dins de la banda formada pels intervals de confiança, fet que indica que podem acceptar que són no correlacionades tal com demana la hipòtesi feble de mercat eficient. Si es complís la hipòtesi forta d'independència, aleshores hauríem d'observar no correlació per a qualsevol funció de les rendibilitats, en particular per a les rendibilitats elevades al quadrat. El segon gràfic mostra clarament que això no és cert. A més veiem el comportament característic descrit a la literatura de rendibilitats no correlacionades, però rendibilitats al quadrat persistentment positives i no nul·les. Un intent d'explicar aquest comportament ha conduït al desenvolupament dels models ARCH, GARCH i els models de volatilitat estocàstica.

Els resultats obtinguts porten a la conclusió que en els mercats moderns l'eficiència, encara que sigui feble, si no és exactament certa, és molt pròxima a ser-ho. Si en un moment donat els preus no reflecteixen el valor exacte, i es produeix una situació d'arbitratge, ràpidament algú en treu profit i es torna a l'equilibri. Així les possibles ineficiències es tornen sense valor econòmic, si més no per al petit inversor. La hipòtesi d'eficiència porta a la conclusió del comportament aleatori dels mercats i, per tant, a la impossibilitat de la seva predicció. Això condueix a negar tota utilitat a l'anàlisi tècnica. Malkiel [11] fins i tot ridiculitza el fet dient que un mico amb un bastó obtindria els mateixos resultats que un qualificat professional de Wall Street. En qualsevol cas, sembla que molt pocs professionals (menys del 25 %) dels fons d'inversió poden batre al mercat (és a dir, obtenir millor rendibilitat que l'Ibex en el cas espanyol) i, a més, aquells que un any ho fan difícilment ho fan a l'any següent, de manera que el simple atzar explica els seus èxits.

9.2 Volatilitat implícita

En finances, com hem vist, el paradigma del moviment brownià no és completament cert, ni les rendibilitats es distribueixen exactament com una normal ni són realment independents, encara que no siguin correlacionades. A més, el comportament dels derivats amplifica molt el comportament dels subjacents sobre els quals se sustenten. Aquests fets es tradueixen en una valoració dels derivats feta a través de la fórmula de Black i Scholes que, tot i ser una bona primera aproximació, no és suficientment acurada; vegeu [3].

Si analitzem la fórmula de Black i Scholes (9) veiem que depèn de cinc paràmetres amb comportaments diversos. El temps d'exercici de l'opció T i el seu preu K venen fixats en el contracte; dels altres tres paràmetres el que menys afecta el preu de l'opció és el tipus d'interès r que es pot obtenir del mercat, per exemple, amb l'interès de les lletres al mateix venciment que l'opció; el que més afecta l'opció és el preu del subjacent S_0, però aquest valor és conegut de forma contínua en cada moment. Així resulta que el paràmetre crític és la volatilitat σ, l'estimació de la qual demana un històric de preus. Es podria plantejar fer una estimació de la volatilitat i utilitzar la fórmula de Black-Scholes. A la pràctica, però, es fa al revés: els preus de les opcions no s'obtenen pas aplicant la fórmula de Black-Scholes, és el mercat mateix qui posa el preu, seguint simplement la llei de l'oferta i la demanda. I llavors s'utilitza la fórmula de Black-Scholes per a fer justament una estimació de la volatilitat, identificant el valor de σ_a per al qual la fórmula de Black-Scholes donaria el valor observat de mercat. El resultat és el que s'anomena *volatilitat implícita*. Per exemple, amb els valors $S = 10700$, $T = 20/250$, $r = 0.01$ podem buscar per a $K = 10000$ quin valor de la volatilitat fa que la fórmula de Black-Scholes sigui 762 (en lloc de 740); el resultat obtingut numèricament és $\hat{\sigma} = 0.235$. Aquest resultat de la volatilitat fa que la fórmula doni exactament el preu observat al mercat; realment hi ha una relació bijectiva entre els preus de les opcions i les volatilitats. Els especialistes diuen que la volatilitat implícita és aquell valor incorrecte que, posat a una fórmula «incorrecta», dona el resultat correcte.

Per tal d'il·lustrar el que estem dient hem buscat al MEFF preus d'opcions de compra (*call*) sobre l'Ibex el dia 24 d'abril del 2017 amb venciment el 17 de maig. A la taula 1 hem considerat valors de K entre 10000 i 10800 a increments de 100 punts i hem utilitzat els mateixos paràmetres $S = 10700$, $T = 20/250$, $r = 0.01$. La segona línia indica el valor de mercat de C, la quarta la volatilitat implícita corresponent a aquests valors. Veiem que els valors oscil·len al voltant de 0.2; la tercera línia és llavors el valor de C calculat amb aquest valor de σ_a mitjançant la fórmula de Black-Scholes (també podríem triar σ_a de forma que la sèrie obtinguda mitjançant Black-Scholes s'ajusti millor a la sèrie de valors de mercat). Els ajustos són bastant bons, però s'observa que per a valors petits de K la fórmula de Black-Scholes subestima i per a valors grans sobreestima. Aquest comportament no és casual, sinó que s'observa de forma sistemàtica en tots els mercats, tal com comentarem a continuació.

K	10000	10100	10200	10300	10400	10500	10600	10700	10800
Call	762	673	587	505	427	355	288	228	177
BS	740	654	572	495	423	358	298	246	200
Vol. impl.	0.235	0.226	0.218	0.211	0.204	0.198	0.191	0.185	0.181

TAULA 1: Preus observats (*call*), els preus calculats amb la fórmula de Black-Scholes (BS) i les volatilitats implícites (vol. impl.).

La volatilitat implícita és diferent per a cada valor de K que considerem, mentre que el model de Black-Scholes utilitza la mateixa volatilitat per a tots els valors de K (i de T). Si dibuixem la volatilitat implícita en funció de K quan utilitzem la fórmula de Black-Scholes en els preus de les monedes, s'obté una corba amb un perfil quadràtic (*smile*) i, quan la utilitzem en els valors de les accions o índexs, com en el cas present de l'Ibex, s'obté una corba decreixent (*skew*).

El desajust de la fórmula en termes de les volatilitats implícites es pot estudiar també en funció del temps T i en funció simultàniament de K i T, la qual cosa dona lloc al que s'anomena *superfície de volatilitat*. La superfície de volatilitats interpola les dades de mercat dels derivats i, aleshores, permet deduir preus per a valors de T i K dels quals no es tinguin valors de mercat (per a més informació, vegeu Gatheral [7]).

En resum, la fórmula de Black-Scholes és important perquè determina el llenguatge de les finances; els valors de les seves derivades, que avaluen la sensibilitat, tenen nom propi (delta, gamma, vega, ro ...). El gestor d'una cartera generalment vol estar *delta neutral* per a no veure's massa afectat pel canvi de preus dels subjacents, i cal comprar o vendre els subjacents corresponents (això significa que munta una cartera neutral tal com hem explicat a la secció 8, a partir de $\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$). Les carteres d'actius es gestionen a través de derivats perquè és la manera més ràpida i barata de fer-ho. Pensem, per exemple, en l'or, no es compra i ven or directament sinó futurs i altres derivats sobre aquest metall que són registres informàtics més senzills d'emmagatzemar. El mateix passa amb altres mercaderies com el petroli o el blat; també les accions són més cares de gestionar que les opcions sobre les mateixes accions. Els índexs com l'Ibex, l'Euro Stoxx 50 o el Dow Jones no es poden comprar, però sí que es venen derivats sobre aquests índexs que serveixen per a gestionar les carteres de valors.

9.3 Dia a dia de la gestió del risc en una entitat financera

La terminologia anglesa s'imposa, i avui en les entitats financeres tothom parla de *front office* (o *trading floor*) per referir-se al que abans se'n deia *tresoreria*, que és on els *traders* compren i venen actius, per satisfer les demandes dels clients i gestionar les seves carteres i les del propi banc. El *middle office* el forma la gent que vigilen els riscos en què poden incórrer els *traders* del *front office*, que naturalment estan regulats, i de totes les posicions de l'entitat en general, per a trametre la informació corresponent dins de la pròpia entitat, i també al supervisor, que avui és el Banc Central Europeu. És també aquí on treballen els analistes, com els matemàtics, que elaboren els models que els *traders* necessiten. El treball d'administració i gestió dels documents que s'han de preparar per a acreditar totes les operacions de compravenda, els contractes i les qüestions jurídiques que se'n deriven es fa des del *back office*.

L'actuació al llarg del dia està en mans dels *traders*, que parlen amb els clients i tanquen les operacions al mercat. El primer que necessiten quan comença el dia és saber els preus de mercat, per això el banc està subscrit a les plataformes que contenen aquesta informació a temps continu (Reuters o Bloomberg). A la vegada han de conèixer la corba de tipus d'interès, que es calcula a partir dels bons, i la superfície de volatilitat dels derivats, que també es calcula cada matí i es distribueix a tots els qui han d'operar amb derivats. Aquesta feina, així com l'ajust dels paràmetres dels models de valoració a partir dels preus de mercat, que es llegeixen a Bloomberg i Reuters, es prepara des del *middle office*. La funció del departament és també veure com afecta el moviment dels tipus d'interès en els beneficis i el capital de l'entitat. L'ajust dels paràmetres es realitza amb hores de treball nocturn dels ordinadors a partir dels preus de tancament del dia. Així des de primera hora del matí es treballa amb els models ajustats a temps «$n - 1$».

Diàriament es descarreguen els preus de Bloomberg i s'insereixen en la base de dades pròpia. S'inclouen preus de tancament d'*equity* (accions i índexs borsaris), de tipus d'interès, *commodities* (matèries primeres) i corbes FX de canvis de moneda, de futurs de *commodities*, volatilitats implícites i dividends d'alguns subjacents concrets. Es valoren les operacions de renda fixa, notes estructurades i derivats sobre *equity*, tipus d'interès, tipus de canvi, matèries primeres i inflació. Es calculen les superfícies de volatilitat, potser els paràmetres de Heston [8] d'alguns derivats de l'Ibex o l'Euro Stoxx. Es calibren els models de Hull & White per als derivats de tipus d'interès. Finalment, tots els càlculs fets s'insereixen en les bases de dades pròpies i alguns es carreguen també a les plataformes esmentades.

Referències

[1] Avellaneda, M.; Laurence, P. *Quantitative Modeling of Derivative Securities. From Theory to Practice*. Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC, 2000.

[2] Bachelier, L. «Théorie de la spéculation». *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 17 (1900), 21–86.

[3] Badescu, A.; del Castillo, J.; Ortega, J.-P. «Hedging of time discrete auto-regressive stochastic volatility options». *Ann. Econ. Stat.*, 123–124 (2016), 271–306.

[4] Black, F.; Scholes, M. «The pricing of options and corporate liabilities». *J. Polit. Econ.*, 81 (3) (1973), 637–654.

[5] Cont, R. «Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues». *Quant. Finance*, 1 (2) (2001), 223–236.

[6] Cox, J. C.; Ross, S. A.; Rubinstein, M. «Option pricing: a simplified approach». *J. Financ. Econ.*, 7 (3) (1979), 229–263.

[7] Gatheral, J. *The Volatility Surface: A Practitioner's Guide*. Nova Jersey: Wiley-Interscience, 2006.

[8] Heston, S. «A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options». *Rev. Financ. Stud.*, 6 (2) (1993), 327–343.

[9] Hull, J. C. *Options, Futures, and Other Derivatives*. 9a ed. EUA: Pearson, 2015.

[10] Jolis, M. «Probabilitat i Anàlisi, uns grans amics». *MatMat*, treball núm. 2 (2013), 26 p. `http://mat.uab.cat/matmat/PDF v2013/v2013n02.pdf`.

[11] Malkiel, B. G. *Un paseo aleatorio por Wall Street*. 10a ed. Madrid: Alianza Editorial, 2013.

[12] Merton, R. C. «Theory of rational option pricing». *Bell J. Econom. and Management Sci.*, 4 (1973), 141–183.

[13] Taylor, S. J. *Asset Price Dynamics, Volatility and Prediction*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2005.

[14] Valdivia, A. «Matemàtica financera en temps de crisi». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 29 (2) (2014), 167–197.

Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
{bruna,castillo}@mat.uab.cat